Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

$$\mathrm{M}_1(x)N_1(y)y' + M_2(x)N_2(y) = 0$$

№8 блок. $(x^2+4)y' - 2xy = 0$ теңдеуінің $y(1)=5$ болғандағы дербес шешімін табыңыз:

A) $y = Cx^2 + 4$
B) $y = x^2 + 4$
C) $y = -x^2 - 4$
D) $y = x^2 - 4$
E) $y = 4x^2$

Шешуі: Айнымалыларды ажыратамыз:

$$(x^2+4)y' - 2xy = 0$$

$$(x^2+4)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2xy$$

$$(x^2+4)dy = 2xydx$$

Айнымалыларды ажыратамыз:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2x}{x^2+4}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2x}{x^2+4}dx$$

$$\ln|y| = \ln|x^2+4| + \ln C$$

Жалпы шешім: $y = C\cdot(x^2+4)$

$5 = C\cdot(1+4)$

$C = 1$

Дербес шешім: $y = x^2 + 4$

№8.2 $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$ теңдеуінің $y(e)=1$ болғандағы дербес шешімін тап

A) $y = \ln|x| + 5$
B) $y = \ln|x|$
C) $y = 2\ln|x| - 1$
D) $y = \ln|x| - 4$
E) $y = 2\ln|x|$

1 ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Қолданылатын алмастыру: $y = uv;\ y' = u'v + uv'$

№9 блок.1

Теңдеудің жалпы шешімін тап $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{2x}}{x}$

A) $y = x(e^{2x} + C)$
B) $y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$
C) $y = \frac{1}{x^2}(e^{2x} + C)$
D) $y = x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$
E) $y = x^2e^{2x} + C$

Шешуі:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = \frac{e^{2x}}{x}$$

1) $v' + \frac{1}{\mathrm{x}}v = 0$ 2) $u'v = \frac{e^{2x}}{x}$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln v = -\ln x$$

$$v = \frac{1}{x}$$

Табылған мәнді 2- теңдеуге қоямыз:

$$\frac{1}{x}u' = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = e^{2x}$$

$$\int du = \int e^{2x}dx$$

$$u = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Жалпы шешімі: $y = \frac{1}{x}(\frac{1}{2}e^{2x} + C)$

№9.2

Теңдеудің жалпы шешімін тап $y' - \frac{y}{x} = \frac{2}{x}$

A) $y = Cx^2$
B) $y = \frac{C}{x}$
C) $y = Cx - 2$
D) $y = \frac{C}{x^2}$
E) $y = Cx$

№9.3

Теңдеудің жалпы шешімін тап $y' - \frac{y}{x} = xctgx$

A) $y = x(\sin x + C)$
B) $y = x(\cos x + C)$
C) $y = \ln|\sin x| + x + C$
D) $y = x(\ln|\sin x| + C)$
E) $y = x(tgx + C)$

Толық дифференциалдар теңдеуі

$$\mathrm{M}(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$$

№10.1

$(e^{y} + x)dx + (xe^{y} + 3)dy = 0$ теңдеуінің $y(1)=0$ шартын №10.1 қанағаттандыратын дербес интегралын тап.

A) $x^2 + e^y + y^3 - 1 = 0$

B) $e^y + xy^2 = 1$

C) $\dfrac{x^2}{2} + e^y + y = \dfrac{3}{2}$

D) $\dfrac{x^2}{2} + xe^y + 3y = \dfrac{3}{2}$

E) $x^2 + xe^y + 2y = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ендеше толық дифференциалдар теңдеуі

1) $\int (e^y + x)dx = e^y x + \dfrac{x^2}{2}$

2) $\int (xe^y + 3)dy = xe^y + 3y$

Жалпы шешімі: $e^y x + \dfrac{x^2}{2} + 3y = C$ $\qquad$ $e^1 \cdot 0 + \dfrac{0}{2} + 3 \cdot 1 = C$

$C = 3$

Дербес шешім: $e^y x + \dfrac{x^2}{2} + 3y = 3$

10 блок $ye^x dx + \left(y + e^x\right)dy = 0$ 10 блок теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын тап.

A) $x + y^2 e^x = 1$

B) $\frac{y^2}{2} + y + ye^x = 2{,}5$

C) $(x + y)e^x = 1$

D) $e^x + ye^x = 2$

E) $ye^x + \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}$

Бернулли теңдеуі

$$y' + p(x)y = q(x)\cdot \mathrm{y}^{\mathrm{n}}$$

№4039

$$y' + \frac{1}{1+x}y = -\mathrm{y}^2$$

Әрбір мүшесін y^2 бөлеміз:

$$y^{-2}\cdot y' + \frac{1}{1+x}y^{-1} = -1$$

Алмастыру енгіземіз:

$y^{-1} = \mathrm{z}$ $\qquad$ $-y^{-2}\cdot y' = z'$

Теңдеу келесі түрге келді:

$$-z' + \frac{1}{1+x}z = -1$$

$z' - \frac{1}{1+x}z = 1$ Сызықты дифференциалдық теңдеу.

$$\mathrm{z} = uv; z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{1+x}uv = 1$$

$$u'v + (uv' - \frac{1}{1+x}uv) = 1$$

$$u'v + u(v' - \frac{1}{1+x}v) = 1$$

1) $v' - \frac{1}{1+\mathrm{x}}v = 0$

2) $u'v = 1$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x+1}v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$\ln v = \ln|x+1|$$

$$v = x+1$$

Табылған мәнді 2- теңдеуге қоямыз:

$$(x+1)u' = 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

$$\int du = \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$u = \ln|x+1| + C$$

$$\mathrm{y}^{-1} = \mathrm{z} = uv = (x+1)(\ln|x+1| + C)$$

$$\frac{1}{\mathrm{y}} = (x+1)(\ln|x+1| + C)$$

Жалпы шешімі: $y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + C)}$

11 –блок Реті төмендетілетін Дифференциалдық теңдеулер:

11.1 $y^{//}=\frac{2}{x^2}+3x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

A) $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2\ln x$

B) $y=\frac{x^3}{2}-2\ln|x|+C_1x+C_2$

C) $y=\frac{x^3}{3}-\ln|x|+C_1x+C_2$

D) $y=\frac{x^3}{6}+2\ln|x|+C_1x+C_2$

E) $y=\frac{x^3}{3}-2\ln|x|+C_1x+C_2$

Шешуі:

$$y^{//}=\frac{2}{x^2}+3x$$

$$y'=\int\frac{2}{x^2}dx+\int 3xdx=-2\frac{1}{x}+3\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$y=-2\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{2}\int x^2dx+C_1\int=-2\ln[x[+\frac{x^3}{2}+C_1x+C_2$$

Жалпы шешімі: $y'=-2\ln|x|+\frac{x^3}{2}+C_1x+C_2$

11.2 $y^{//}=2x^2+x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

A) $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2 lnx$

B) $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+C_1x+C_2$

C) $y=\frac{x^3}{3}-x^4+C_1x+C_2$

D) $y=\frac{x^3}{6}-2x^4+C_1x+C_2$

E) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$

11.2 $y^{//} = 2x^2 + x$

Шешуі:

$$y^{//} = 2x^2 + x$$

$$y' = 2\int x^2 dx + \int x dx = 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = \frac{2}{3}\int x^3 dx + \frac{1}{2}\int x^2 dx + C_1\int dx = \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

Жалпы шешімі: $y == \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

12 –блок + 13- блок Коэффициенттері тұрақты біртекті Дифференциалдық теңдеулер:

12.1Сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $16y'' + 8y' + y = 0$.

A) $y = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{\frac{1}{4}x}$

B) $y = c_1 e^{-\frac{1}{4}x} + c_2 e^{-\frac{1}{4}x}$

C) $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cdot x$

D) $y = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{\frac{1}{4}x} \cdot x$

E) $y = c_1 e^{-\frac{1}{4}x} + c_2 e^{-\frac{1}{4}x} \cdot x$

12.1) $16y'' + 8y' + y = 0$

Шешуі:

Алмастыру: $y = e^{kx}$; $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$

$$16k^2 e^{kx} + 8ke^{kx} + e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(16k^2 + 8k + 1) = 0$$

$$16k^2 + 8k + 1 = 0$$

$$D = 64 - 64 = 0$$

$$k_{1;2} = \frac{-8}{32} = -\frac{1}{4}$$

Жалпы шешімі: $y = C_1 e^{-\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-\frac{1}{4}x} \cdot x$

12.2) Сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $9y'' + 6y' + y = 0$.

A) $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 e^{\frac{x}{3}}$

B) $y = c_1 e^{-\frac{x}{3}} + c_2 e^{\frac{x}{3}} \cdot x$

C) $y = c_1 e^{-\frac{x}{3}} + c_2 e^{-\frac{x}{3}}$

D) $y = (c_1 + c_2 x) \cdot e^{-\frac{x}{3}}$

E) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$

№4251 Сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' + y' - 2y = 0$.

Шешуі:

Алмастыру: $y = e^{kx}$; $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$

$$k^2 e^{kx} + ke^{kx} - 2e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + k - 2) = 0$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$k_{1;2} = \frac{-1 \pm 3}{2}; k_1 = -2; k_2 = 1$$

Жалпы шешімі: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

№4256

$y'' + y = 0$.

Шешуі:

Алмастыру: $y = e^{kx}$; $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$

$$k^2 e^{kx} + e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 = -1$$

$$k_{1;2} = \pm i$$

Жалпы шешімі: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

№4257

$y'' + 6y' + 13y = 0$.

$y'' + 6y' + 13y = 0$

Шешуі:

Алмастыру: $y = e^{kx}$; $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$

$k^2 e^{kx} + 6ke^{kx} + 13e^{kx} = 0$

$e^{kx}(k^2 + 6k + 13) = 0$

$k^2 + 6k + 13 = 0$

$D = 36 - 52 = -16$

$k_{1;2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$

Жалпы шешімі: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$